

مقدمه ناشر

حُب! بچه‌های خوب و زرنگ! اومدین به پایه یازدهم.

رسیدن به خیر!

دیگه کم‌کم زندگی داره جدی میشه! یازدهم، دوازدهم و کنکور!

از امسال دیگه باید مثل آدم بزرگ‌ها زندگی کنید. خوبه که بیشتر فکر کنید، برای آینده شغلی، حسی، عشقی، هنری و اجتماعی تون تصمیم بگیرید! راجع به این که حتماً می‌خواهید در رشته ریاضی درس بخونید یا نه، ایران می‌مونید یا نه، دوست دارید در آینده چه کاره بشید یا نه!! خوب فکر کنید. یه کتاب باحالی می‌خوندم که می‌گفت ذهنًا از پایان آغاز کنید!

ببینید وقتی که داستان زندگی تموم شد و روم به دیوار از این دنیا رفتید، می‌خواهید روی سنگ قبرتان چی بنویسند! دوست دارید به چه چیزی در دنیا مشهور شده باشید! دوست دارید بگن این آدم، این‌جا که بود، چه کاری کرد کلاً!

تا الان زندگی برای شما این‌ور نوار^۱ رو گذاشته بود، یعنی احتمالاً شادی و بازی و خنده! دیگه بزرگ شدید و زندگی کم‌کم براتون اون‌ور نوار رو می‌ذاره؛ درس، کنکور، کار، اجتماع، مسئولیت، رشد شخصی، پول، پیشرفت و ...

هر چه قدر زودتر زندگی اون طرف نوار رو بداره، کلاً برای آدم بهتره!

ممنون از دو دوست خوب، رسول‌جان محسنی‌منش و سروش‌خان مؤئینی. سروش را با «جان» نوشتم چون فکر کردم با «خان» بهتر می‌شود! امیدوارم دوستی‌تان و دوستی‌مان پاینده باشد، کتاب نوشتن که همیشه هست!

ممنون از فرشاد فرامرزی عزیز که در به‌روزدن این کتاب زحمت خیلی زیادی کشید.

ممنون از محسن‌جان فراهانی و مرسی از آقا مهران جعفری و خانم ملک‌پور که خیلی دوشان‌گرم باد! و دوستای پای کار و زحمتکش تولید خیلی سبز!

ببخشید که یک قسمت‌هایی از مقدمه به کم تلخ شد!



۱- اون موقع‌ها که ما جوون بودیم! یک چیزهایی بود به اسم نوار کاست که می‌گذاشتیم توی ضبط‌صوت. یک طرفش گلچین شاد بود، یک طرفش هم یک خواننده لس‌آنجلسی! وقتی روی A تمام می‌شد، نوار را از ضبط‌صوت خارج نموده و این رو، آن رویش می‌کردیم و روی B را می‌گذاشتیم در ضبط‌صوت! به روی B می‌گویند اون‌ور نوار! در واقع نوار زندگی هر آدم یک‌ور این طرفی و یک‌ور آن طرفی دارد که به ور آن طرفی‌اش می‌گویند اون‌ور نوار!

مقدمه مؤلفان

تقدیم به

همه دانش‌آموزان و معلمان خوب ایران

به کتاب آمار و احتمال خیلی سبز خوش آمدید.

نحوه استفاده از کتاب:

الف اگر به مدرسه یا کلاس می‌روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمه محبت و موفقیت است»، با راهنمایی معلمان در مورد ترتیب خواندن درس‌نامه‌ها و حل کردن تست‌ها و بررسی پاسخ‌ها، برنامه‌ریزی و اجرا کنید.

ب اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می‌کنید توصیه ما این است که: **۱** اول درس‌نامه را خوب و کامل بخوانید. **۲** چیزهایی از درس‌نامه که مهم است را مشخص کنید، یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. **۳** یک بار دیگر فقط تست‌های درس‌نامه را حل کنید. **۴** بروید سراغ تست‌ها، پاسخ تست‌ها را اول از پاسخ‌نامه کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ‌های تشریحی را بخوانید. **یک نکته خیلی مهم:** در تمامی فصل‌ها تمامی مطالب مربوط به آن فصل که در سال دهم دیده‌اید به صورت کامل و کنکوری آورده شده است، اگر کنکوری هستید که باید همه آن‌ها را بخوانید و تست‌هایش را بزنید ولی اگر یازدهمی هستید حتماً درباره نحوه مطالعه این قسمت‌ها با معلمان مشورت کنید.

◀ ساختار کتاب:

◀ درس‌نامه:

۱ در درس‌نامه آیکن‌های **نکته**، **تذکر** و **یادآوری** داریم:

نکته: نشان‌دهنده نکته‌ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می‌شود تست را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

تذکر: نشان‌دهنده یک اشاره کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می‌شود مطلب را بهتر بفهمید. این‌طور هم می‌توانیم بگوییم که **تذکر:** یک **نکته** خیلی ساده و عادی است.

یادآوری: نشان‌دهنده یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس‌های قبلی یا سال‌های قبل است.

۲ در درس‌نامه کتاب سعی کرده‌ایم از جدول، نمودار، دسته‌بندی و هر چیزی که باعث می‌شود درس را بهتر و مؤثرتر یاد بگیرید استفاده کنیم. حواستان باشد که برای بررسی بعضی از جدول‌ها باید حسابی وقت بگذارید.

۳ تک‌تک مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اولاً کاربرد نکته‌ها و مفاهیم گفته‌شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً نمونه‌های اصلی و پرتکرار تست‌های کنکور را ببینید. باز هم توصیه می‌کنیم بعد از این‌که درس‌نامه هر درس را خوب و کامل خواندید برگردید و یک بار دیگر تست‌های درس‌نامه را حل کنید.

◀ تست‌ها:

۱ تست‌ها را با وسواس خیلی زیادی چیده‌ایم تا روند تسلط شما بر مطالب آسان‌تر شود، پس حتماً سعی کنید با همان ترتیب تست‌ها را حل کنید.

۲ تمامی تمرین و مثال‌های کتاب درسی و کنکور سال‌های اخیر را در کتاب خواهید دید، حتماً توجه ویژه‌ای به آن‌ها داشته باشید.

۳ تست‌هایی که با **Ⓢ** مشخص شده‌اند از اهمیت بیشتری برخوردارند حتماً آن‌ها را بررسی کنید.

۴ در آخر هر فصل تعدادی تست سری Z داریم که مخصوص دانش آموزان علاقه مند و البته برای آنهایی است که می خواهند در آزمون های آزمایشی و بعدترها در کنکور، درس ریاضی را صد بزنند.

۵ در حل تست ها چه در درس نامه و چه در پاسخ ها نمادهای **راه اول**، **راه دوم** و ... را داریم که نشان دهنده روش های مختلف حل یک تست است. معمولاً در **راه اول** متداول ترین راه حل و یا سریع ترین آن ها آمده است.

◀ اشارات:

۱ در انتهای هر کدام از فصل ها یک آزمون داریم. توصیه شدید و اکید داریم که تا وقتی همه مطالب فصل را خوب یاد نگرفته اید و تست های فصل را حل و دوره نکرده اید سراغ آزمون نروید.

۲ توصیه ما برای استفاده از پاسخ نامه این است:

الف) تعداد مشخصی تست برای یک نشست انتخاب و حل کنید (مثلاً ۳۰ تا).

ب) درستی پاسخ ها را از روی پاسخ نامه کلیدی بررسی کنید.

پ) برگردید و سعی کنید تست هایی را که جواب نداده اید یا غلط زده اید دوباره حل کنید.

ت) بروید سراغ پاسخ نامه تشریحی، اول پاسخ تست هایی را که جواب نداده اید و یا غلط زده اید ببینید و بعد از این که این ها را خوب فهمیدید و یاد گرفتید شروع کنید از اول نگاهی به همه پاسخ ها بیندازید. بررسی **راه اول**، **راه دوم**، **نکته** ها و **تذکر** ها باعث می شود به همه نکته ها و ریزه کاری های درس مسلط شوید.

و حرف آخر هم این که:

• برای این که این کتاب بهترین باشد کلی کار کرده ایم. به نظر خودمان خیلی خوب شده است 😊 و امیدواریم نظر شما هم همین باشد.

• اگر اشتباه، غلط، جابه جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم.

• از مهندس نوید شاهی عزیز و آقای امیرحسین غفوری که در تمام مراحل کتاب با وسواس و دقت بی نظیرشان همراه ما بودند تشکر می کنیم.

• از محسن فراهانی عزیز بابت نظرات مفید و بهبود کیفیت کتاب ممنونیم.

• از تمامی دوستان و همکارانمان در انتشارات خیلی سبز، خصوصاً مهران جعفری عزیز و سرکار خانم هدی ملک پور که زحمت پیگیری تمام امور این کتاب را داشتند، تشکر می کنیم.

 @mathmohsenimanesh

 @soroushmueeni

فهرست

صفحه

۱ فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات و استدلال

۸	درس اول: گزاره
۲۲	درس دوم: جبر مجموعه‌ها
۴۳	آزمون:
۴۴	سری Z:

۲ فصل دوم: احتمال

۴۶	درس اول: مبانی احتمال (فضای نمونه‌ای و پیشامد)
۵۰	درس دوم: احتمال هم‌شانس
۵۹	درس سوم: قوانین احتمال
۶۳	درس چهارم: احتمال غیرهم‌شانس
۶۶	درس پنجم: احتمال شرطی
۷۲	درس ششم: قانون احتمال کل
۷۹	درس هفتم: پیشامدهای مستقل
۸۵	آزمون:
۸۶	سری Z:

۳ فصل سوم: آمار توصیفی

۸۹	درس اول: مقدمه‌ای بر علم آمار (سال دهم)
۹۱	درس دوم: توصیف و نمایش داده‌ها
۹۷	درس سوم: معیارهای گرایش به مرکز
۱۰۸	درس چهارم: شاخص‌های پراکندگی
۱۲۱	آزمون:
۱۲۲	سری Z:

۳ فصل چهارم: آمار استنباطی

۱۲۴	درس اول: روش‌های نمونه‌گیری
۱۲۷	درس دوم: برآورد
۱۳۵	آزمون:
۱۳۵	سری Z:
۱۳۶	پاسخ‌نامه تشریحی
۲۲۳	پاسخ‌نامه کلیدی

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات و استدلال

به فصل آشنایی با مبانی ریاضیات و استدلال خوش آمدید.

مباحث مهم و پرسؤال ترکیب گزاره‌ها، جبر مجموعه‌ها، ضرب دکارتی

مباحث پیش‌نیاز فصل اول ریاضی ۱

حرف آخر در کنکورهای سال‌های اخیر، همواره یک تست از منطق ریاضی و ترکیب گزاره‌ها

مطرح شده است.

درس ۱: گزاره

به هر جمله خبری که درست یا نادرست باشد گزاره می‌گوییم.

دقت کنید که جمله خبری؛ نه عاطفی، نه امری، نه پرسشی، نه احساسی (به دور از هر گونه ابتذال و نظر شخصی و سلیقه).

مثلاً «علی دایی بازیکن خوبی است.» یک گزاره ریاضی نیست؛ چون از نظر افراد مختلف درستی یا نادرستی آن متفاوت است اما «علی دایی ۲۴۳ گل در رقابت‌های ملی زده است.» یک گزاره ریاضی است که ارزش آن نادرست است.

اگر گزاره‌ای درست باشد، می‌گوییم ارزش آن «د» یا «T» است. (حروف اول «درست» و «True»)

و اگر گزاره‌ای نادرست باشد، می‌گوییم ارزش آن «ن» یا «F» است. (به «نادرست» و «False» اشاره دارند).

تست: کدام یک از جملات زیر یک گزاره نیست؟

- (۱) عدد ۳، زوج است. (۲) عدد ۱ + ۲۲۲۲، عددی اول است. (۳) مستطیل یک نوع لوزی است. (۴) به نظر شما، در مربع هر چهار ضلع برابرند؟

پاسخ: F: گفتیم که گزاره یک جمله خبری است که ارزش مشخصی از نظر درست‌بودن یا نادرست‌بودن داشته باشد. جمله F چون جمله خبری نیست پس گزاره نیست. ۱ یک گزاره با ارزش نادرست است (چون ۳ فرد است). ۲ یک گزاره است با این‌که تعیین درست یا نادرست‌بودنش سخت است اما نهایتاً بعد از محاسبات می‌توانیم بفهمیم که عدد ۱ + ۲۲۲۲ اول هست یا نه. ۳ هم یک گزاره است چون یک جمله خبری است و ارزشش قابل تعیین است که به وضوح نادرست است.

نکته: اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند (یعنی یا هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند)، می‌نویسیم: $p \equiv q$ ، در این صورت به گزاره‌های p و q هم‌ارز می‌گویند.

گزاره‌نما گزاره‌نما گزاره‌ای است که متغیر دارد و اگر به جای متغیر آن، مقدار قرار دهیم ممکن است درست یا نادرست شود.

مثلاً گزاره‌نمای « $x < x^2$ » برای $x = \frac{1}{4}$ نادرست و برای $x = 3$ درست است. این یک گزاره‌نمای یک‌متغیری است.

گزاره‌نمای دومتغیری « $2x + 3y = 20$ » به ازای مقادیر $x = 4$ و $y = 4$ درست است اما با قراردادن $x = 2$ و $y = 5$ غلط می‌شود.

دامنه و مجموعه جواب گزاره‌نما در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توانیم به جای متغیر آن قرار دهیم D (دامنه) می‌گوییم. آن مقادیری که ارزش گزاره را درست می‌کند، S (مجموعه جواب) نام دارند.

دامنه تعریف گزاره‌نما را عموماً در مقابل گزاره‌نما می‌نویسند، (این هوری؛

پس در این جا دامنه تعریف گزاره‌نما، اعداد گویا است. حالا دقت کنید که تساوی $x^2 = x$ فقط به ازای $x = 0, 1$ درست است. پس مجموعه جواب گزاره‌نما برابر است با: $S = \{0, 1\}$

نکته: اگر مجموعه جواب یک گزاره‌نما با دامنه آن یکسان باشد ($S = D$)، یعنی گزاره‌نما همواره درست است.

تست: چند گزاره‌نما در دامنه داده شده همواره درست هستند؟

- (۱) $\sqrt{x^2} = x, D = \mathbb{R}$ (۲) $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, D = \mathbb{W}$ (۳) $\sqrt{x^2} = x, D = \mathbb{N}$ (۴) صفر

پاسخ: ۲: $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ به ازای $x = 0$ درست نیست، پس با دامنه $D = \mathbb{W}$ مجموعه جوابش $S = \mathbb{N}$ است. اما گزاره‌نماهای دیگر در دامنه خود درست‌اند.

تست: مجموعه دامنه و جواب در کدام گزاره‌نما، در یک عضو اختلاف دارند؟ ($n(D) - n(S) = 1$)

- (۱) $\begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 \\ D = \mathbb{Z} \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} [x] < x \\ D = \{\sqrt{2}, -1, \frac{1}{4}\} \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} \sqrt{x-1}\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - x} \\ D = \mathbb{N} \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x^3 > x^2 \\ D = [0, +\infty) \end{cases}$

پاسخ: ۲: همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ گزاره‌نمای $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1$ به ازای دو عدد ± 1 از $\mathbb{Z}$ درست نیست. پس S دو عضو کم‌تر از D دارد.

۲ گزاره‌نمای $[x] < x$ به ازای اعداد صحیح درست نیست که در این دامنه فقط عدد -1 را داریم، پس $D = \{\sqrt{2}, -1, \frac{1}{4}\}$ و $S = \{\sqrt{2}, \frac{1}{4}\}$ و همین جواب است.

۳ $\sqrt{x-1} \times \sqrt{x} = \sqrt{x^2 - x}$ در دامنه $\mathbb{N}$ همواره برابر $\sqrt{x^2 - x}$ است، پس $S = D = \mathbb{N}$

۴ $x^3 > x^2$ برای اعداد حقیقی بیشتر از ۱ درست است؛ یعنی $S = (1, +\infty)$ و بی‌شمار عدد در بازه $[0, 1]$ هست که گزاره را نادرست می‌کند.

جدول ارزش گزاره‌ها

یک گزاره از نظر ارزش ۲ حالت (درست یا نادرست) دارد. دو گزاره $۲ \times ۲ = ۴$ حالت دارند و در حالت کلی برای n گزاره ۲^n حالت وجود دارد. مثلاً برای دو گزاره، جدول مقابل را رسم می‌کنیم و چهار حالت را نشان می‌دهیم. به این جدول، جدول ارزش گزاره‌ها گفته می‌شود. مشخص است که جدول ارزش n گزاره دارای ۲^n سطر است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

q د یا ن است.

$$۱ \times ۲ \times ۲ = ۴$$

r د یا ن است. p د است.

اگر ارزش یک گزاره مثل p مشخص باشد، در ضرب کردن هایمان باید ۱ حالت برای p در نظر بگیریم، مثلاً ارزش گزاره‌های p، q و r هر کدام ۲ حالت دارند و از کنار هم قرار گرفتن آن‌ها $۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۳$ حالت به وجود می‌آید. یعنی جدول ارزش این سه گزاره ۸ سطر خواهد داشت. حالا اگر بدانیم که گزاره «درست» است، تعداد سطرهای جدول این سه گزاره برابر است با:

تست: در چهار گزاره p، q، r و s، جدول ارزش دارای حالت است و اگر بدانیم $s \equiv T$ و $p \equiv F$ ، حالت از آن کم می‌شود.

۴، ۱۶ (۴)

۱۲، ۱۶ (۳)

۸، ۱۶ (۲)

۴، ۱۶ (۱)

پاسخ: چهار گزاره داریم، پس $۲^۴ = ۱۶$ حالت دارند. اگر تکلیف ارزش s و p معلوم باشد، عملاً دو گزاره q و r را داریم که $۲^۲ = ۴$ حالت به ما می‌دهند و ۱۲ تا از حالت‌ها کم می‌شود.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را به صورت «چنین نیست که p» می‌خوانیم. به علامت « $\sim$ » ناقص گفته می‌شود. مثلاً نقیض گزاره «p: ۲۳ عدد اول است.» این‌گونه ساخته می‌شود: « $\sim p$ »: چنین نیست که ۲۳ عدد اول است.» عموماً جمله دوم را می‌شود بهتر بیان کرد، این‌پوری: « $\sim p$ »: ۲۳ عدد اول نیست.»

تذکر: ارزش گزاره‌های p و $\sim p$ مخالف هم است. یعنی اگر p درست باشد، حتماً $\sim p$ نادرست است و برعکس. بدیهی است که اگر یک گزاره را دو بار نقیض کنیم به خودش می‌رسیم، یعنی: $\sim(\sim p) \equiv p$

نکته: یک سری از کلمات و نمادها هستند که در نقیض کردن گزاره‌ها به آن‌ها بیشتر برمی‌خوریم، آن‌ها و نقیض‌هایشان را یک بار با هم ببینیم:

الف) فرد است. $\sim$ زوج است.	ب) گویا است. $\sim$ گنگ است.	پ) است. $\sim$ نیست.
ت) $a > b \leftarrow \sim a \leq b$	ث) $a \geq b \leftarrow \sim a < b$	ج) $a = b \leftarrow \sim a \neq b$

گزاره‌های مرکب

گزاره‌های «p: ۲ عددی زوج است.» و «q: امروز جمعه است.» را در نظر بگیرید. به گزاره‌هایی مثل «۲ عددی زوج است» یا «امروز جمعه است.» و «۲ عددی زوج نیست و امروز جمعه است.» که از گزاره‌های ساده p و q درست شده‌اند، گزاره‌های مرکب گفته می‌شود. به چیزهایی که دو یا چند گزاره را به هم ربط می‌دهند و گزاره‌های مرکب درست می‌کنند، «ادات ربط» گفته می‌شود. کار اصلی ما در گزاره‌های مرکب این است که با توجه به ارزش گزاره‌های اولیه بتوانیم ارزش گزاره مرکب ایجادشده را تعیین کنیم. این شما و این انواع گزاره‌های مرکب:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ترکیب فصلی دو گزاره $p \vee q$ را به صورت «p یا q» می‌خوانیم و ترکیب فصلی دو گزاره نام دارد. $p \vee q$ وقتی درست است که p یا q یا هر دو درست باشند. فقط در حالتی که p و q هر دو نادرست باشند، $p \vee q$ غلط می‌شود. جدول ارزش آن را ببینید:

گفتیم که ارزش $p \vee q$ در صورتی نادرست می‌شود که p و q هر دو نادرست باشند، از درک درست این موضوع می‌توانیم به نتایج مهم زیر برسیم:

ویژگی	$p \vee T \equiv T$	$p \vee F \equiv p$	$p \vee \sim p \equiv T$
مفهوم	اگر یکی از گزاره‌ها درست باشد، بدون توجه به ارزش گزاره دیگر، ارزش ترکیب فصلی حتماً درست است.	اگر یکی از گزاره‌ها نادرست باشد، ارزش گزاره فصلی، همان ارزش p است.	از بین p و $\sim p$ حتماً ارزش یکی درست است و همین کافی است که ارزش گزاره فصلی درست باشد.

تذکر: در دو گزاره دلخواه، $\frac{۳}{۴}$ احتمال دارد که $p \vee q$ درست باشد. (موافقت؟)

مثال: ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$ ب $\forall n \in \mathbb{N}; (4^n + 1) \in P$ ت $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y^3+3}{5} = 0$ پ $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -1$

پاسخ: الف نادرست است. چون تساوی به ازای $x=2$ برقرار نیست.

نقیض: $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-4}{x-2} \neq x+2$ (نوع سور عوض و بیان گزاره نیز نقیض می‌شود).

ب نادرست است. مثلاً به ازای $n=3$ داریم: $4^3+1=65$ که به 5 می‌خورد و اول نیست. نقیض:

پ نادرست است. مثلاً به ازای $x=-\frac{1}{2}$ داریم: $x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2}$ که از -1 بیشتر است. نقیض:

ت درست است. عدد $y = -\sqrt[3]{3}$ تساوی را برقرار می‌کند.

نقیض: $\forall y \in \mathbb{R}; \frac{y^3+3}{5} \neq 0$

تست: نقیض گزاره سوری « $\forall x \in A; x \geq 2 \vee x = -1$ » کدام است؟

الف $\exists x \in A; x < 2 \wedge x \neq -1$ ب $\forall x \notin A; x < 2 \wedge x \neq -1$ ج $\exists x \notin A; x < 2 \wedge x \neq -1$ د $\exists x \in A; x < 2 \vee x \neq -1$

پاسخ: الف به $\exists$ تبدیل می‌شود اما دامنه تغییر نمی‌کند. برای نقیض کردن $(x \geq 2 \vee x = -1)$ از قضیه دمورگان استفاده می‌کنیم و نقیضش می‌شود:

$x < 2 \wedge x \neq -1$

درس ۱: گزاره

گزاره و گزاره‌نما

۱- در کدام گزینه جمله بیان شده گزاره است؟

۱) حافظ بهترین شاعر ایران است.

۳) هیچ عدد مرکبی، عدد اول نیست.

۲- در کدام گزینه با قراردادن مقدار مناسب در $\square$ می‌توان یک گزاره درست ایجاد کرد؟

۱) $-(x - \square)^2 > 0$ ۲) $(\square/1)^5 > \square^3$

۳) نمودار توابع $y = x^2$ و $y = -1$ در نقطه $\square$ یکدیگر را قطع می‌کنند. ۴) خط $x = k$ به ازای $k = \square$ یک تابع است.

۳- کدام عبارت یک گزاره‌نما است؟

۱) عددی مضرب ۱۱ است که مجموع ارقام آن بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

۳) چهار برابر عددی حقیقی برابر ۶۸ است.

۴- چندتا از جملات زیر یک گزاره‌نمای یک متغیره هستند؟

• a عددی فرد است.

• مربع عددی از خود عدد کوچک تر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- در کدام گزینه دامنه متغیر گزاره‌نما (D) و مجموعه جواب آن (S) با هم برابرند؟

۱) x مضرب ۷ است $(x \in \mathbb{Z})$ ۲) $(x \in \mathbb{R}) 4x^2 - 5x + 1 = 0$

۳) P عددی اول است $(P \in \mathbb{N})$ ۴) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$ (عدد روشده تاس است).

۶- مجموعه جواب کدام گزاره‌نما با دامنه متغیر گزاره‌نمای آن برابر است؟

۱) $D = \mathbb{R}^+$ و $[x] = x$ ۲) $D = \mathbb{Z}^+$ و $\frac{|x|}{x} = 1$

۳) $D = \{-1, 1, 0\}$ و $x^2 - 4x - 5 = 0$ ۴) $D = \mathbb{Z}$ و $\sqrt{x^2} = x$

۷- جدول ارزش گزاره دارای ۳۲ حالت است. جدول ارزش $\frac{2n-1}{3}$ گزاره چند حالت دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۸- در جدول حالت‌های گزاره p, q, r اگر بدانیم که $p \equiv q$ و $s \equiv r$ است، چند حالت مختلف وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۹- جدول ارزش m گزاره ۶۴ سطر دارد. در چندتا از این سطرها ارزش دقیقاً ۳ گزاره درست است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵

۱۰- در پنج گزاره s, t, r, p در چند حالت حداقل ۲ تا از گزاره‌ها درست هستند؟

۱) ۸ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۸۰

تست: در کیسه اول ۴ سفید و ۵ سیاه، در کیسه دوم ۲ سفید و ۷ سیاه و در کیسه سوم فقط مهره‌های سفید داریم. یک کیسه را به تصادف انتخاب کرده و دوتا مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو سفیدند؟

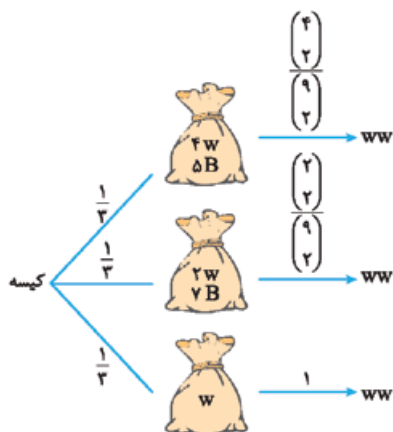
$$\begin{array}{ll} \frac{49}{108} & (1) \\ \frac{47}{108} & (2) \\ \frac{41}{108} & (3) \end{array}$$

پاسخ ۳: قبل از هر کاری باید تشخیص داده باشیم که از تیپ اول است! و بگوییم شانس انتخاب هر کیسه

$\frac{1}{3}$ است و نمودار درختی را بکشیم:

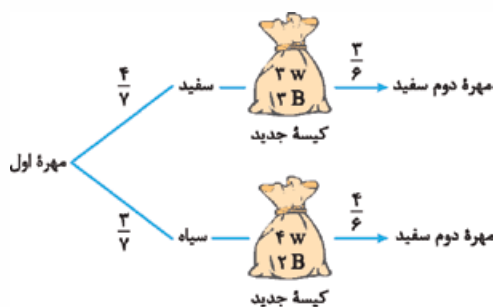
جواب می‌شود:

$$\frac{1}{3} \times \frac{6}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{6+1+36}{3 \times 36} = \frac{43}{108}$$



قصه گذشته‌ها رو بی‌خیال

اگر از کیسه‌ای مهره خارج کنیم و بدون مشاهده رنگ مهره آن را کنار بگذاریم، انگار که مهره‌ای خارج نشده است؛ مثلاً از کیسه‌ای شامل ۴ سفید و ۳ سیاه، یک مهره برمی‌داریم و نگاه نمی‌کنیم. حالا چه قدر احتمال دارد مهره بعدی سفید باشد؟ طبق قانون بالا، انگار که مهره اول درنیامده و کیسه هنوز ۴ سفید و ۳ سیاه دارد و جواب می‌شود $\frac{4}{7}$. اگر دوست ندارید، باید با دقت بررسی کنیم: مهره اول سفید یا سیاه است و موقع برداشتن مهره دوم، یک مهره از کیسه کم شده؛ پس احتمال سفیدبودن مهره دوم می‌شود: $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{12+12}{42} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$ دیدید؟ جواب همان شد.



تست: پیک رستوران از بین ۳ نوع ساندویچ، ۲ پیتزا و ۴ غذای پرسی، دوتا را فراموش کرده است. با کدام احتمال اولین غذایی که از بین این‌ها انتخاب می‌کنیم، پیتزا است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{8} & (1) \\ \frac{2}{9} & (2) \\ \frac{3}{7} & (3) \\ \text{صفر} & (4) \end{array}$$

$$P(\text{پیتزا}) = \frac{n(\text{پیتزا})}{n(\text{کل})} = \frac{2}{9}$$

پاسخ ۲: حساس نباشید! انگار هیچ اتفاقی نیفتاده است و داریم:

قانون بیز

در یک مسئله احتمال کل (چند کیسه، چند کارخانه و ...) اگر بیان مسئله شبیه احتمال شرطی شود، یعنی می‌دانیم که یک اتفاقی رخ داده و احتمال دیگری را می‌خواهیم، از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)}{P(B)} \times P(B | A_i)$$

مثل فرمول احتمال کل که غالباً در حل تست‌ها استفاده نمی‌شد و از نمودار درختی استفاده می‌کردیم، این فرمول هم خیلی به کارمان نمی‌آید و در مثال زیر مفهوم این فرمول را یاد می‌گیریم و خیلی راحت از پس تست‌ها برمی‌آییم، نگاه کنید:

مثال: در یک ایستگاه مخابراتی به طور تجربی، فراوانی نقطه به خط به نسبت ۴ به ۳ است. اگر یک نقطه ارسال شود، احتمال این که خط دریافت شود $\frac{1}{8}$ و اگر خط ارسال شود، احتمال این که نقطه دریافت شود $\frac{1}{8}$ است. می‌دانیم در انتهای مسیر خط دریافت شده است. احتمال این که نقطه ارسال شده باشد، چه قدر است؟



پاسخ: استفاده از قانون بیز این جوری است که نمودار درختی را به طور کامل رسم می‌کنیم، مخرج کسر احتمال می‌شود شاخه‌هایی که می‌دانیم یکی از آن‌ها رخ داده و صورتش می‌شود شاخه مورد نظر سؤال.

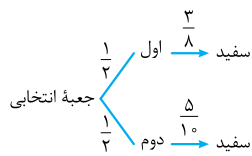
$$P(\text{دریافت خط و ارسال نقطه}) = \frac{P(\text{دریافت خط} | \text{ارسال نقطه})}{P(\text{دریافت خط})}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{8}}{\frac{4}{7} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{7} \times \frac{7}{8}} = \frac{4}{4+21} = \frac{4}{25} = 0.16$$

تست: در دو جعبه به ترتیب ۸ و ۱۰ مهره داریم که در اولی ۳ تا و در دومی ۵ تا از مهره‌ها سفیدند. از یک جعبه به تصادف مهره‌ای بیرون می‌آوریم و می‌بینیم سفید است. با کدام احتمال این مهره از جعبه اول است؟

- (۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{7}{16}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{3}{7}$

پاسخ ۴: گفتیم که باید نمودار درختی را رسم کنیم و احتمال سفیدبودن را پیدا کنیم:



$$P(\text{سفید}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} = \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$$

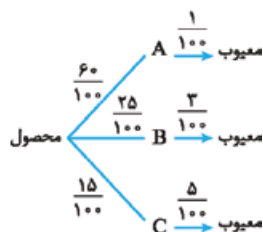
$$P(\text{سفید} | \text{جعبه اول}) = \frac{\text{سهم شاخه بالا}}{\text{جواب کل}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}$$

حالا قانون بیز می‌گوید:

تست: در کارخانه‌ای ماشین‌های A، B و C به ترتیب ۶۰، ۲۵ و ۱۵ درصد تولید را انجام می‌دهند. محصولات آن‌ها به ترتیب ۱، ۳ و ۵ درصد معیوب است. یک کالای معیوب از این کارخانه، با کدام احتمال محصول ماشین B است؟

- (۱) $\frac{75}{10000}$ (۲) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{2}{7}$

پاسخ ۲: نمودار درختی می‌کشیم و احتمال معیوببودن را حساب می‌کنیم:



$$P(\text{معیوب}) = \frac{60}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{15}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{210}{10000}$$

$$P(B | \text{معیوب}) = \frac{\text{سهم شاخه B}}{\text{جواب کل}} = \frac{75}{210} = \frac{5}{14}$$

و از قانون بیز استفاده می‌کنیم:

درس ۶: قانون احتمال کل

۴۹۴- اگر احتمال به دنیا آمدن یک نوزاد پسر مبتلا به نوعی بیماری خاص ۰/۰۸ و همین احتمال برای یک نوزاد دختر ۰/۰۴ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۰/۰۵ (۲) ۰/۰۶ (۳) ۰/۰۷ (۴) ۰/۰۸

۴۹۵- در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۱۵/۲ (۲) ۱۵/۶ (۳) ۱۵/۸ (۴) ۱۶/۲

۴۹۶- تکمیل بنای راهی ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تأخیر بیفتد. احتمال آن که اعتصابی رخ دهد ۰/۶۵، احتمال آن که اگر اعتصابی نباشد، کار به موقع انجام شود ۰/۸ و احتمال آن که اگر اعتصابی باشد، کار به موقع انجام شود ۰/۳ است. احتمال این که کار بنای راه به موقع انجام شود، چه قدر است؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۰/۴۷۵ (۲) ۰/۴۲۵ (۳) ۰/۴ (۴) ۰/۳۸۵

۴۹۷- دانش‌آموزی پاسخ ۶۰ درصد از تست‌ها را بلد است و اگر بلد نباشد، یکی از ۴ گزینه را شانسی انتخاب می‌کند. با کدام احتمال در دو سؤال، فقط دومی را درست می‌زند؟

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- (۱) ۰/۲۵ (۲) ۰/۲۱ (۳) ۰/۱۵ (۴) ۰/۰۹

۴۹۸- فرض کنید احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، سه برابر احتمال انتقال آن به فرزند دختر باشد. اگر والدین در انتظار فرزندی باشند و با احتمال $\frac{3}{5}$ این فرزند سالم باشد، احتمال انتقال این بیماری به فرزندان پسر، چند درصد است؟

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۶ (۳) ۲۰ (۴) ۶۰

۶۰۴. **۴ راه اول:** احتمال این که هر دو سکه شیر بیاید، $\frac{1}{4}$ است. حالا

احتمال برنده شدن B برابر است با:

$$P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \dots$$

$\xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} = \frac{\frac{3}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{3}{7}$

$a_1 = \frac{3}{16}, q = \frac{9}{16}$

۴ راه دوم: B برای برنده شدن در هر دور، به باختن A احتیاج دارد. چون احتمال

باخت A، $\frac{3}{4}$ است، داریم:

$$P(B) = \frac{3}{4} P(A)$$

از طرفی $P(B) + P(A) = 1$ ، از این دو معادله داریم:

$$P(A) = \frac{4}{7}, \quad P(B) = \frac{3}{7}$$

۶۰۵. **۲** فضای نمونه‌ای پرتاب n سکه، 2^n عضو دارد. این سکه را n بار پرتاب

می‌کنیم و می‌خواهیم در n امین پرتاب، برای k امین بار رو بیاید؛ پس باید در n-1

پرتاب قبل، در k-1 بار رو آمده باشد که $\binom{n-1}{k-1}$ حالت دارد (باید از n-1 پرتاب

قبل، k-1 پرتاب را انتخاب کنیم تا در آن‌ها سکه رو و در بقیه پرتاب‌ها پشت آمده

باشد؛ بنابراین احتمال این که یک سکه را n بار پرتاب کنیم و در n امین پرتاب، برای k

امین بار رو آمده باشد، برابر است با:

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}$$

تعداد حالات این که یک سکه را n بار پرتاب کنیم و k بار رو بیاید، برابر $\binom{n}{k}$

است، پس احتمال آن $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ می‌شود.

حالا داریم:

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n} = \frac{k}{k+5} \times \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{k+5} \times \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k-1)!} = \frac{k \times n}{(k+5) k!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k-1)!} = \frac{n}{(k+5)(k-1)!} \Rightarrow n = k+5$$

$$\Rightarrow n+k = 2k+5$$

n+k برابر $2k+5$ یعنی برابر یک عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ است که در بین

گزینه‌ها فقط ۹ این گونه است.

۶۰۶. **۱** بازیکنی که کوتاه‌ترین قد را دارد، با احتمال $\frac{1}{11}$ در هر یک از

جایگاه‌ها قرار می‌گیرد.

۶۰۷. **۴** عدد ۱ فقط یک مقسوم‌علیه

مثبت دارد. اعداد ۲، ۳ و ۵ دوتا

مقسوم‌علیه مثبت دارند و عدد ۴

سه تا مقسوم‌علیه مثبت دارد. عدد

۶ چهارتا مقسوم‌علیه مثبت دارد.

پس فضای نمونه‌ای $2+12+8+16$ عضو دارد یعنی ۳۸ تا.

عدد ۱ فقط یک مقسوم‌علیه

مثبت دارد. اعداد ۲، ۳ و ۵ دوتا

مقسوم‌علیه مثبت دارند و عدد ۴

سه تا مقسوم‌علیه مثبت دارد. عدد

۶ چهارتا مقسوم‌علیه مثبت دارد.

پس فضای نمونه‌ای $2+12+8+16$ عضو دارد یعنی ۳۸ تا.

۵۹۷. **۳** احتمال مجموع ۷ در دو تاس $\frac{1}{6}$ است (چرا؟) پس برای این که ۳

پرتاب لازم شود، باید در اولی و دومی مجموع ۷ نشود و در سومی ۷ شود:

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

۵۹۸. **۱** در دو آزمایش اول لامپ سالم درآمده و در آزمایش سوم، اولین

معیوب؛ پس داریم:

$$P = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

۵۹۹. **۲** لااقل یک لامپ معیوب باشد، یعنی یک لامپ یا دو لامپ یا سه

لامپ یا چهار لامپ (نشدنی است البته) معیوب باشد. چون حالت‌ها زیاد است،

از قانون متمم استفاده می‌کنیم:

$$P(\text{همگی سالم}) = 1 - P(\text{لااقل یک لامپ معیوب})$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

۶۰۰. **۲** بیش از دو آزمایش لازم شده است، یعنی اولی و دومی افسرده

نبوده‌اند. پس داریم:

$$P(\text{اولی نبوده}) \times P(\text{دومی نبوده}) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

۶۰۱. **۲** باید در پرتاب چهارم رو بیاید و در سه پرتاب اول فقط یک بار رو

بیاید. پس این جوری می‌شود:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{16}$$

و احتمال برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{16}$$

۶۰۲. **۲** بالاخره یا ۴ زودتر می‌آید یا ۶ (هم‌زمان که نمی‌تواند بیایند).

چون همه وجه‌های تاس هم‌شانس هستند، احتمال زودتر آمدن هر کدام $\frac{1}{6}$ است.

۶۰۳. **۲** در پرتاب دو تاس احتمال آمدن مجموع ۱۱ برابر است با $\frac{2}{36}$ یعنی

$\frac{1}{18}$ (برآمدهای (۵،۶) و (۶،۵) خوب هستند).

احتمال جفت آمدن (هر دو عدد یکسان) هم برابر $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ است.

احتمال این که بازی ادامه پیدا کند، یعنی هیچ کدام از این دو اتفاق رخ ندهند،

می‌شود:

$$1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

حالا احتمال این که اول مجموع ۱۱ بیاید می‌شود:

$$\frac{1}{18} + \frac{35}{36} \times \frac{1}{18} + \frac{35}{36} \times \frac{35}{36} \times \frac{1}{18} + \dots$$

و احتمال این که اول مثل هم بیایند می‌شود:

$$\frac{1}{6} + \frac{35}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{35}{36} \times \frac{35}{36} \times \frac{1}{6} + \dots$$

حالا دو راه داریم:

$$\frac{1}{18} + \frac{35}{36} \times \frac{1}{18} + \dots$$

۴ راه اول: از حد مجموع دنباله هندسی می‌نویسیم:

$$= \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{18}}{1-\frac{35}{36}} = \frac{1}{18} \times \frac{36}{1} = 2$$

۴ راه دوم: نسبت این دو احتمال می‌شود $\frac{1/18}{1/6} = \frac{1}{3}$ یعنی $\frac{1}{3}$ و مجموع آن‌ها ۱ است،

پس اولی باید $\frac{1}{4}$ باشد و دومی $\frac{3}{4}$.

۶۰۸. ۴ اگر سکه رو بیاید، دهگان ۱ و اگر پشت بیاید، دهگان ۲ می‌شود. رقم یکان هم عدد روشده تاسی است که ۶ حالت دارد؛ بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $12 = 2 \times 6$ تا می‌شود. این ۱۲ حالت را می‌نویسیم:

۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶
۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶

همان‌طور که می‌بینید، فقط ۳ عدد از این ۱۲ عدد اول‌اند (دور اعداد اول خط کشیده شده است) که احتمال آن $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ می‌شود.

۶۰۹. ۲ حداکثر بر یکی از ۴ و ۶ بخش پذیر است؛ یعنی بر هر دو بخش پذیر نیست.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{200 - [\frac{200}{12}]}{200} = \frac{200 - 16}{200} = \frac{184}{200} = \frac{23}{25} = 0.92$$

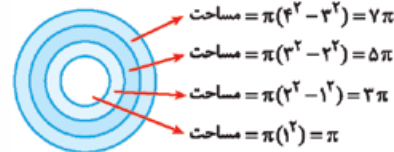
۶۱۰. ۱

$$P(a_1) = x, P(a_2) = x(\frac{1}{2}), P(a_3) = x(\frac{1}{4})$$

$$1 = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{4+2+1}{4}x = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{7} \Rightarrow P(\{a_1, a_2\}) = x + \frac{x}{2} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

۶۱۱. ۱



$$P(3 \text{ یا } 1 \text{ ناحیه}) = P(1) + P(3) = \frac{\pi + 5\pi}{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

۶۱۲. ۳ در حالت‌های $\{11, 12, 21, 22, 31, 32, 41, 23, 13, 14\}$ مجموع از ۶ کمتر است. اختلاف بیشتر از یک، فقط در $41, 13, 14, 31$ وجود دارد که احتمالش می‌شود $\frac{4}{10}$.

۶۱۳. ۲

$$P(B) = 4P(B') \xrightarrow{P(B)+P(B')=1} P(B) = \frac{4}{5}$$

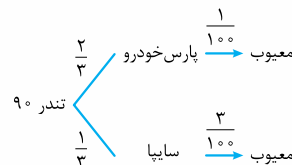
$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 0.3$$

$$\frac{\frac{4}{5} - P(A \cap B)}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{28}{50} = 0.56$$

۶۱۴. ۲

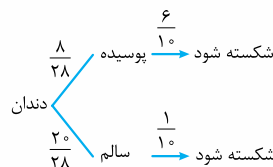
$$P(\text{بدن قبول کند} \cap \text{از عمل زنده بماند}) = \frac{0.7}{\text{از عمل}} \times \frac{0.6}{\text{بدن}} = 0.42$$

۶۱۵. ۲



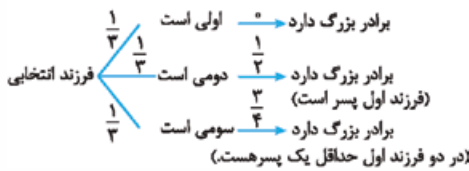
$$P(\text{درست}) = \frac{72}{100} \times 1 + \frac{28}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{72+7}{100} = \frac{79}{100}$$

۶۱۶. ۴



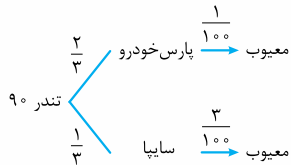
$$P = \frac{8 \times 6 + 20 \times 1}{28 \times 10} = \frac{68}{280} = \frac{17}{70}$$

۶۱۷. ۱



$$P = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}) = \frac{5}{12}$$

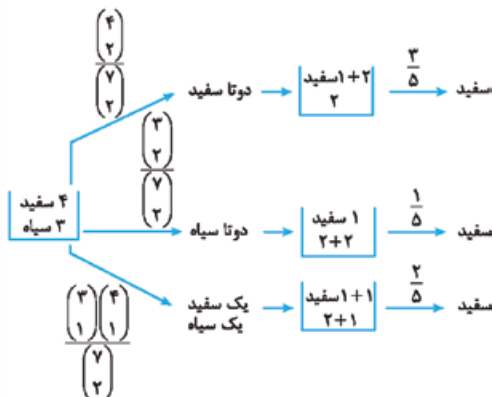
۶۱۸. ۲



$$P(\text{معیوب}) = \frac{2+3}{3 \times 100} = \frac{1}{60}$$

$$P(\text{معیوب} | \text{سایا}) = \frac{P(\text{معیوب و سایا})}{P(\text{معیوب})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{100}}{\frac{1}{60}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

۶۱۹. ۱



$$P(\text{سفید}) = \frac{6}{21} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{21} \times \frac{1}{5} + \frac{12}{21} \times \frac{2}{5} = \frac{18+3+24}{21 \times 5} = \frac{45}{105} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

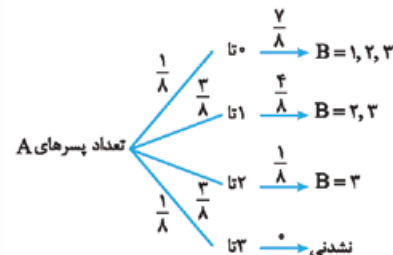
دقت کنید که $\frac{45}{105}$ همان $\frac{3}{7}$ است.

۶۲۰. ۱

$S = \{ \begin{matrix} \text{پ} & \text{د} & \text{پ} & \text{د} & \text{پ} & \text{د} \\ \text{پ} & \text{د} & \text{پ} & \text{د} & \text{پ} & \text{د} \\ \text{پ} & \text{د} & \text{پ} & \text{د} & \text{پ} & \text{د} \end{matrix} \}$

فرزندان برای خانواده سه‌فرزندی به صورت

مقابل است. پس احتمال



۰، ۱ و ۲ و ۳ پسر به ترتیب که در نمودار درختی

$$P = \frac{1 \times 7 + 3 \times 4 + 3 \times 1 + 1 \times 0}{8 \times 8} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

قرار داده‌ایم.

۶۲۱. ۳

$$P(\text{موشک} | \text{تحریم}) = \frac{P(\text{موشک} \cap \text{تحریم})}{P(\text{موشک})}$$

$$\Rightarrow P(\text{موشک} \cap \text{تحریم}) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$$

$$P(\text{موشک} \cup \text{تحریم}) = P(\text{تحریم}) + P(\text{موشک}) - P(\text{موشک} \cap \text{تحریم})$$

$$= 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$$

$$\frac{CV_{\text{ثانویه}}}{CV_{\text{اولیه}}} = \frac{16}{10} \Rightarrow \frac{\frac{\sigma}{\bar{x}-8}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{16}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{x}-8} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \Rightarrow 5\bar{x} = 8\bar{x} - 64 \Rightarrow 3\bar{x} = 64$$

$$\bar{x} = \frac{64}{3} \approx 21.3$$

یعنی میانگین داده‌ها تقریباً برابر است با:

$$79.7. \quad \text{ضریب تغییرات اولش } \frac{\sigma}{\bar{x}} \text{ بوده، بعد که دو برابر کردیم و ۷ واحد کم کردیم، می‌شود } \frac{2\sigma}{2\bar{x}-7}$$

یادآوری: یادتان هست که فقط ضریب روی σ اثر داشت، اما کل تغییرات

روی میانگین اثر می‌کرد.

$$\frac{\sigma}{\bar{x}} \xrightarrow{\text{دو برابر کرده و ۷ واحد کم می‌کنیم.}} \frac{2\sigma}{2\bar{x}-7}$$

حالا سؤال گفته ضریب تغییرات جدید، $1/5$ برابر ضریب تغییرات قبلی است، یعنی:

$$\frac{2\sigma}{2\bar{x}-7} = \frac{1}{5} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} \xrightarrow{\text{همون } 1/5} \frac{2}{2\bar{x}-7} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{5\bar{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4\bar{x} = 6\bar{x} - 21 \Rightarrow 2\bar{x} = 21 \Rightarrow \bar{x} = 10.5$$

سؤال مجموع داده‌های قبلی را می‌خواهد. مجموع داده‌ها پی بود؟ خب تعداد، ضریب در میانگین، پس داریم:

$$\text{مجموع} = n\bar{x} = 20 \times 10.5 = 210$$

$$79.8. \quad \text{واریانس برابر } \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \sigma^2 \text{ است. اگر داده } x_j \text{ مساوی با}$$

میانگین را اضافه کنیم، میانگین کل تغییری نکرده و $x_j - \bar{x}$ نیز مساوی صفر

می‌شود؛ پس اگر $\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{20}} = 2$ انحراف معیار اولیه باشد، با افزودن ۵ عدد

مساوی میانگین، انحراف معیار جدید $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{25}}$ می‌شود.

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{20}} = 2 \Rightarrow \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{20} = 4 \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 80$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار جدید} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{16 \times 5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

ضریب تغییرات یا CV برابر $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ است. با افزودن چند داده مساوی با میانگین،

$\bar{x}$ تغییری نمی‌کند؛ پس:

$$\frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{اولیه}}} = \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

79.9. اگر همه داده‌های آماری با هم برابر باشند واریانس آن‌ها صفر است

و برعکس. با توجه به این که با اضافه شدن سه داده ۲۴، ۱۶ و ۲۶ میانگین تغییر نمی‌کند، پس میانگین ۱۱ داده و میانگین سه داده باید با هم برابر باشند یعنی:

$$22 = \frac{24+26+16}{3} = \text{میانگین ۳ داده} = \text{میانگین ۱۱ داده}$$

بنابراین میانگین کل داده‌ها برابر ۲۲ و ۱۱ داده اولیه نیز هر کدام برابر ۲۲ هستند.

واریانس داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{11(22-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (16-22)^2}{14} = \frac{16+4+36}{14} = 4$$

با جذر از واریانس، انحراف معیار به دست می‌آید و با قراردادن در فرمول $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ضریب تغییرات ۱۴ داده به دست می‌آید.

$$CV = \frac{\sqrt{4}}{22} = \frac{2}{22} \xrightarrow{\text{درصد}} \frac{2}{22} \times 100 = \frac{200}{22} \approx 9.1\%$$

میانگین این ۳۰ داده آماری برابر $2 - \frac{3}{4} = 1.25$ و انحراف معیار آن‌ها برابر ۳۵

می‌شود؛ بنابراین ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{35}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{3 \times 1/2}{3 \times 3/5 - 2/4} = \frac{3/6}{8/1} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$$

79.3. وقتی هر داده را $12/5\%$ افزایش می‌دهیم یعنی مثلاً به داده x_1 ،

$12/5$ درصد x_1 اضافه کنیم.

$$x_1 + \frac{12/5}{100} x_1 = \frac{112/5}{100} x_1 = 1/125 x_1$$

پس با شرایطی که مسئله اعلام کرده انگار هر داده در $1/125$ ضرب می‌شود. می‌دانیم:

(۱) اگر داده‌ها در عدد a ضرب شوند میانگین نیز در a ضرب می‌شود.

(۲) اگر داده‌ها در عدد a ضرب شوند انحراف معیار نیز در $|a|$ ضرب می‌شود.

بنابراین اگر ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ باشد،

ضریب تغییرات داده‌های $1/125 x_1, 1/125 x_2, \dots, 1/125 x_n$ برابر با

$$\frac{1/125 \sigma}{1/125 \bar{x}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

آماری در عددی (مثبت) ضرب شوند، ضریب تغییرات ثابت می‌ماند.

79.4. ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $1/25$ است.

داده‌های $y_1, y_2, \dots, y_n$ از جمع یک چهارم میانگین با دو برابر هر داده به

دست می‌آید یعنی:

$$2x_1 + \frac{1}{4}\bar{x}, 2x_2 + \frac{1}{4}\bar{x}, \dots, 2x_n + \frac{1}{4}\bar{x}$$

می‌دانیم:

(۱) اگر داده‌ها در a ضرب و با b جمع شوند، میانگین آن‌ها نیز در a ضرب و با b جمع می‌شود.

(۲) اگر داده‌ها در a ضرب و با b جمع شوند، انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود.

حالا که داده‌ها در ۲ ضرب شدند و با $\frac{1}{4}\bar{x}$ جمع شدند پس میانگین نیز در ۲ ضرب و با $\frac{1}{4}\bar{x}$ خودش جمع می‌شود؛ اما انحراف معیار فقط در ۲ ضرب می‌شود.

$$CV_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 1/25$$

$$CV_2 = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + \frac{1}{4}\bar{x}} = \frac{2\sigma}{\frac{9}{4}\bar{x}} = \frac{2}{9} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{9} \times 1/25 = 1/225$$

79.5. اگر دقت کنید، داده‌های ۲، ۲، ۵، ۳، ۳، ۳ از داده‌های

۱، ۱، ۴، ۲، ۲، ۲، یک واحد بیشترند. پس σ دو گروه با هم مساوی است اما

میانگین‌ها فرق دارند:

$$2, 2, 5, 3, 3, 3 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{2+2+5+3+3+3}{6} = 3$$

$$1, 1, 4, 2, 2, 2 \Rightarrow \bar{x}_2 = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{1+1+4+2+2+2}{6} = 2$$

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sigma}{\bar{x}_1}}{\frac{\sigma}{\bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = \frac{2}{3}$$

پس داریم:

79.6. اگر داده‌ها در a ضرب و با b جمع شوند:

(۱) میانگین در a ضرب و با b جمع می‌شود.

(۲) انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود.

بنابراین وقتی داده‌ها با b جمع شوند، ضریب تغییرات این‌طوری می‌شود:

$$CV_{\text{اولیه}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad CV_{\text{ثانویه}} = \frac{\sigma}{\bar{x}+b}$$

از داده‌ها ۸ واحد کم شده یعنی ضریب تغییرات جدید برابر است با:

سؤال گفته ضریب تغییرات جدید 60% بیشتر از قبل است یعنی:

$$CV_{\text{ثانویه}} = \frac{16}{10} CV_{\text{اولیه}} \Rightarrow CV_{\text{ثانویه}} - CV_{\text{اولیه}} = \frac{6}{10} CV_{\text{اولیه}}$$

۸۰۰. ۱ در داده‌های ۱۲ و ۱۶، میانگین و واریانس برابرند با:

$$\bar{x}_r = \frac{12+16}{2} = 14 \quad \bar{\sigma}_r^2 = \frac{(12-14)^2 + (16-14)^2}{2} = 4$$

پس میانگین اولیه یعنی $\bar{x}_1 = 14$ بوده و واریانس هم که خود تست گفته ۹ بوده است. پس واریانس ۱۰ داده جدید برابر است با:

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2}{n_1 + n_2} = \frac{(8 \times 9) + (2 \times 4)}{10} = \frac{80}{10} = 8$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

در جامعه جدید میانگین که همان ۱۴ است و انحراف معیار هم $2\sqrt{2}$ به دست آمد، پس ضریب تغییرات می‌شود:

$$CV = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}} = \frac{2\sqrt{2}}{14} = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

۸۰۱. ۱ داده آماری داریم. این ۸ داده را با x_1 تا x_8 نمایش می‌دهیم. میانگین این ۸ داده ۲۵ است، یعنی $\bar{x} = 25$ و واریانس این ۸ داده ۱۶ است که از آن نتیجه می‌گیریم انحراف معیار ۴ می‌شود؛ بنابراین:

$$\bar{x} = 25 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} = 25$$

$$\sigma_{\text{اولیه}} = 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{(x_1 - 25)^2 + \dots + (x_8 - 25)^2}{8}} = 4 \quad (I)$$

$$\Rightarrow CV_{\text{اولیه}} = \frac{\sigma_{\text{اولیه}}}{\bar{x}_{\text{اولیه}}} = \frac{4}{25}$$

ابتدا معادله (I) را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{(x_1 - 25)^2 + \dots + (x_8 - 25)^2}{8}} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{(x_1 - 25)^2 + \dots + (x_8 - 25)^2}{8} = 16$$

$$\Rightarrow (x_1 - 25)^2 + \dots + (x_8 - \bar{x})^2 = 16 \times 8 = 128 \quad (II)$$

حالا فرض کنید n داده برابر با میانگین (یعنی n داده که همشون ۲۵ هستند) به این داده‌ها اضافه می‌کنیم. واضح است که میانگین داده‌های جدید هم ۲۵ می‌شود، اما انحراف معیار آن‌ها برابر است با:

$$\sigma_{\text{جدید}} = \sqrt{\frac{\overbrace{(x_1 - 25)^2 + \dots + (x_8 - 25)^2}^{128} + \overbrace{(25 - 25)^2 + \dots + (25 - 25)^2}^{n \times \text{صفر}}}{8 + n}}$$

$$= \sqrt{\frac{128}{8 + n}}$$

پس ضریب تغییرات داده‌های جدید برابر است با:

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{\sqrt{\frac{128}{8 + n}}}{25}$$

ضریب تغییرات قبلی $\frac{4}{25}$ بود. اگر از آن ۴ درصد کم شود، مقدار جدید آن برابر می‌شود با:

$$\frac{4}{25} - \frac{4}{25} \times \frac{4}{100} = \frac{4}{25} - \frac{4}{625} = \frac{100 - 4}{625} = \frac{96}{625}$$

حالا می‌خواهیم ضریب تغییرات جدید، بیش از ۴ درصد کم شود؛ یعنی باید:

$$\frac{\sqrt{\frac{128}{8 + n}}}{25} < \frac{96}{625} \Rightarrow \sqrt{\frac{128}{8 + n}} < \frac{32 \times 3}{25}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{128}{8 + n} < \frac{32 \times 32 \times 3 \times 3}{625} \Rightarrow \frac{1}{8 + n} < \frac{72}{625}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} 8 + n > \frac{625}{72} \approx 8.67 \Rightarrow n > 0.67$$

بنابراین حداقل باید یک داده اضافه شود.

۸۰۲. ۴ از همه داده‌ها ۱۹ تا کم کنیم: (تأثیری در واریانس ندارد).

$x - 19$	-4	-2	0	2	4
f	6	8	7	10	9

میانگین می‌شود:

$$\bar{y} = \frac{6(-4) + 8(-2) + 7(0) + 10(2) + 9(4)}{6 + 8 + 7 + 10 + 9} = \frac{16}{40} = 0.4$$

با استفاده از مجموع مربعات داریم:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum f_i y_i^2 - \bar{y}^2$$

$$= \frac{1}{40} (6(-4)^2 + 8(-2)^2 + 7(0)^2 + 10(2)^2 + 9(4)^2) - (0.4)^2$$

$$= \frac{15(16) + 18(4)}{40} - 0.16 = 7/8 - 0.16 = 7/16$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 7/16$$

۸۰۳. ۴ اول میانگین:

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{2(1) + 7(3) + 3(5) + 5(7) + 3(9)}{2 + 7 + 3 + 5 + 3}$$

$$= \frac{2 + 21 + 15 + 35 + 27}{20} = \frac{100}{20} = 5$$

حالا نوبت واریانس است. هر داده را منهای ۵ می‌کنیم و به توان ۲ می‌رسانیم. ضرب در فراوانی یادتان نرود:

$$\sigma^2 = \frac{2(1-5)^2 + 7(3-5)^2 + 3(5-5)^2 + 5(7-5)^2 + 3(9-5)^2}{20}$$

$$= \frac{\overbrace{2(16)}^{32} + \overbrace{7(4)}^{28} + \overbrace{3(0)}^{0} + \overbrace{5(4)}^{20} + \overbrace{3(16)}^{48}}{20} = \frac{128}{20} = \frac{64}{10} = 6.4$$

۸۰۴. ۳ برای راحتی، داده‌ها را منهای ۱۶ می‌کنیم، پس میانگین هم منهای ۱۶ یعنی برابر صفر می‌شود. داریم:

$x_i - 16$	-4	-2	0	2	4
فراوانی	5	7	10	a	3

$$\text{میانگین} = \frac{-4 \times 5 - 2 \times 7 + 0 + 2a + 4 \times 3}{5 + 7 + 10 + a + 3} = 0$$

$$-20 - 14 + 0 + 2a + 12 = 0 \Rightarrow a = 11$$

پس: از جدول بالا که انحراف داده‌ها از میانگین را نشان می‌دهد واریانس را پیدا می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + f_5(x_5 - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5}$$

$$= \frac{5(-4)^2 + 7(-2)^2 + 0 + 11(2)^2 + 3(4)^2}{5 + 7 + 10 + 11 + 3}$$

بنابراین:

$$\sigma^2 = \frac{5 \times 16 + 7 \times 4 + 0 + 11 \times 4 + 3 \times 16}{36} = \frac{200}{36} = \frac{50}{9}$$

تذکر: یادمان باشد حتماً موقع محاسبه واریانس، مربعات انحراف داده‌ها از میانگین را در فراوانی آن‌ها ضرب کنیم. (در بالا $f_1, f_2, \dots, f_5$ فراوانی هستند).

۸۰۵. ۳ اگر داده‌ها را در جدول بنویسیم داریم:

x_i	7	9	11	13	15
فراوانی	4	7	5	3	1

برای راحتی محاسبه میانگین، داده‌ها را منهای ۱۱ می‌کنیم و در آخر به میانگینی که به دست می‌آوریم، ۱۱ واحد اضافه می‌کنیم:

$x_i - 11$	-4	-2	0	2	4
فراوانی	4	7	5	3	1

$$\text{میانگین} = \frac{-4 \times 4 - 2 \times 7 + 0 + 2 \times 3 + 4 \times 1}{4 + 7 + 5 + 3 + 1} + 11 = \frac{-20}{20} + 11 = 10$$